數學傳播 47卷4期, pp. 89-97

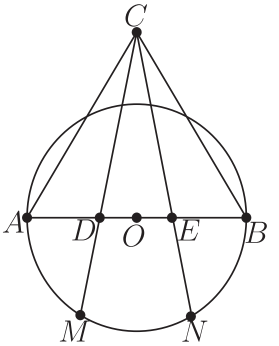
初等的問題宜用初等的辦法

穎　青

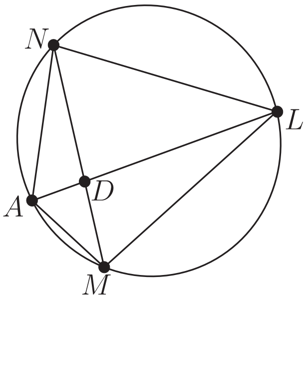
緣起與大綱

在數學傳播 187 期的 [1] 文中, 以下簡稱之爲于文, 引起我們從數學教育的角度, 對它做一番思考。

簡單地說: 于文 等於「一個公式 +6 個例證」。這個公式是座標平面上的「三點會共線的充分必要條件」, 但卻不是用通常的縱橫坐標, 而是用極座標表達。那 6 個例子, 我們現在馬上重述[1]爲下列的命題。



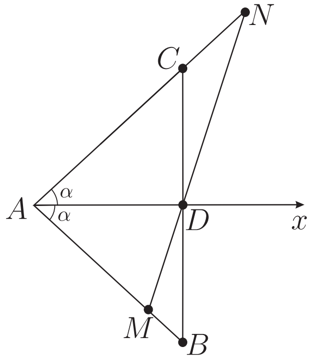
例 1 甲: 依圓 O 的直徑 $\overline{AB}$ 畫出正三角形 ABC。將與 C 異側的半圓弧 $\overparen{AB}$ 等分成三段圓弧 $\overparen{AM}$, $\overparen{MN}$, $\overparen{NB}$, 於是: 兩線 $\overline{CM}, \overline{CN}$, 將 $\overline{AB}$ 等分爲三段!



例 2 丁: 過正三角形 LMN 的外接圓圓弧 $\overparen{MN}$ 的任一點 A, 連 AL, 交 $\overline{NM}$ 於 D, 於是:

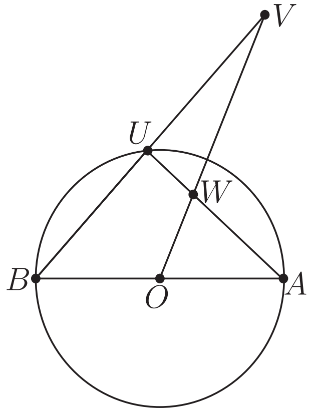
$$\frac{1}{\overline{\overline{AM}}} + \frac{1}{\overline{\overline{AN}}} = \frac{1}{\overline{\overline{AD}}}.$$

[1] 我們保持于文中的順序, 由 1 到 6。但是在數碼之後, 我們另外加綴了一個天干, 這個由易到難的標籤(從甲到己) 是我們逐例討論時的順序。

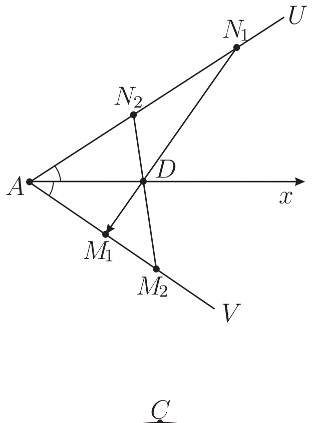


例 3 **丙**: 過等腰三角形 ABC 底邊的中點 D 任畫一線, 交 $\overrightarrow{AC}$ 於 N, 交 $\overrightarrow{AB}$ 於 M, 於是: $\overline{AM}$, $\overline{AB}$, $\overline{AN}$ 成調和數列。

$$\text{即}: \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AN}} = \frac{2}{\overline{AB}}.$$

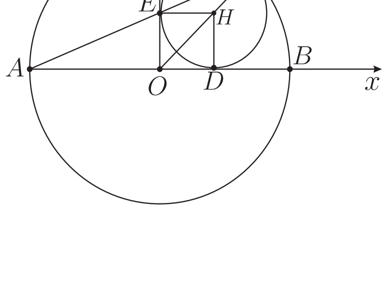


例 4 **己**: 設 : 定圓 O 有一條定直徑 $\overline{AB}$。任取圓上的動點 U, 而非 A 或 B 者。連 B, U 並延長到點 V 處, 使得: $\overline{UV} = \overline{BU}$。令 $\overline{AU}$ 與 $\overline{OV}$ 的交點爲 W, 於是: 動點 W 的軌跡是與圓 O 內切於 A 的圓, 半徑爲 $\frac{1}{3}\overline{AB}$。



例 5 **戊**: 過 $\angle UAV$ 的分角線上一點 D, 任畫一線, 交 $\overrightarrow{AU}$ 於 M_1, 交 $\overrightarrow{AV}$ 於 N_1; 再畫一線, 交 $\overrightarrow{AU}$ 於 M_2, 交 $\overrightarrow{AV}$ 於 N_2。

$$\text{於是:}\ \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{N_1N_2}} = \frac{\overline{AM_1} \times \overline{AM_2}}{\overline{AN_1} \times \overline{AN_2}}。$$



例 6 **乙**: 設: $\overline{OC}$ 是圓 O 的一條半徑, 垂直於直徑 $\overline{AB}$。而圓 H 切半徑 $\overline{OB}$ 於點 D, 切半徑 $\overline{OC}$ 於點 E, 又切圓弧 $\overparen{BC}$ 於點 F。於是: A, E, F 三點共線。

本文的動機

于文合適的對象主要是中學老師以及較高階的中學生。這樣子才可以談使用極座標法。但是, 在中學數學課程中, 極座標法絕對是相當「後程的」。事實上, 在科學中, 極座標法常常是配合了微積分法, 才變成是「非常有用」, 乃至於「不得不用」的工具。換句話說: 要處理初等幾何的題材, 極座標法無法與縱橫的笛卡爾座標法競爭。

「三點共線的充要條件」雖然也可以說「並不算太難」, 可是要用極座標來表達, 然後用 Sarrus 的定準 (determinant = 行列式) 來驗算, 計算量與難度也比笛卡爾座標法更大更高。

我們看到: 于文的這些例子全都是 (我們從來理解爲) 初中平面幾何的題材, 也就是只涉及直線形 (尤其三角形) 以及圓, 但沒有錐線。

所以我們這裡, 將把這些題目, 全部用初學者可以理解的, 綜合幾何的方式來解。換句話說, (幾乎) 連笛卡爾座標法也用不到!

各節工作述要

- §1 處理 例 1 甲, 例 6 乙。它們的圖形是確定不移的, 而且所需要知道的幾何算術知識, 也最少[2], 因此它們是最最容易的幾何計算題。
  它們題目中原有的圓, 只有一點點功能[3], 可以刪掉。
- §2 處理 例 3 丙, 例 2 丁, 例 5 戊。它們的圖形中含有可動的自由度, 比上一組難一些。
  因爲我們是用綜合幾何的方式來解, 命題之間的蘊含關係就很重要了。我們此地就是由例 3 丙出發而推導出例 2 丁與例 5 戊。
- §3 處理例 4 己, 這是軌跡題, 應該算是最難的。但是我們仍然用綜合幾何的方式[4]來解, 不用到 sin, cos.

小小的結論

越是簡單淺顯的題目, 越是值得我們思考: 怎麼用簡單初等的方法來解它。

1. 兩題簡單的幾何計算

對於前述的例 1 甲, 其實只用到正三角形的性質而已, 圓的性質只用到一點點, 所以現在擦拭掉圖中的圓, 同時把原先的命題, 改述成如下等價的

---

[2]就分別只是:「正三角形的高長是邊長的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍」, 與「正四角形的對角線長是邊長的 $\sqrt{2}$ 倍」。

[3]「圓心到切點的半徑, 垂直於切線」。

[4]對於一個優秀的初中生, 這一題真正的難處是軌跡的概念。

命題甲 $1'$: 取正三角形 $\triangle ABC$

底邊 $\overline{AB}$ 的中點 O,

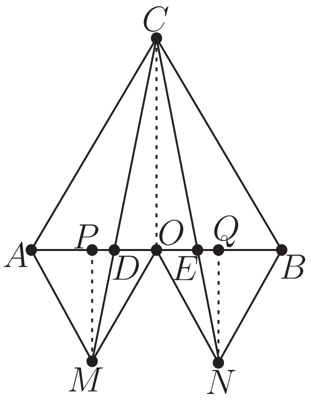
在 $(AB$ 線的$)$ C 之異側,

畫出兩個正三角形

$\triangle AMO$, 與 $\triangle ONB$.

則：兩線 $\overline{CM}, \overline{CN}$,

將 $\overline{AB}$ 等分爲三段!



證明: 設: $\overline{OA}$ 的中點爲 P, $\overline{OB}$ 的中點爲 Q; 而: $\overline{CM}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點爲 D, $\overline{CN}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點爲 E。所以 $\overline{MP}$, $\overline{NQ}$, 與 $\overline{CO}$ 分別是正三角形 $\triangle AMO, \triangle BNO$, 與 $\triangle ACB$ 的高線。這三個正三角形當然相似,

$$\triangle AMO \sim \triangle BNO \sim \triangle ACB;$$

相似比是

$$\overline{AO} : \overline{AB} : \overline{BO} = 1 : 2 : 1;$$

所以:

$$\overline{MP} : \overline{CO} : \overline{NQ} = 1 : 2 : 1;$$

現在考慮兩個直角三角形 $\triangle MPD$ 與 $\triangle COD$ 是否相似。我們也就同時考慮兩個直角三角形 $\triangle NQE$ 與 $\triangle COE$ 是否相似。因爲:

$$\overline{MP} \parallel \overline{CO}; \qquad \overline{NQ} \parallel \overline{CO};$$

所以: 內錯角相等:

$$\angle PMD = \angle OCD; \qquad \angle QNE = \angle OCE;$$

於是這兩組直角三角形相似:

$$\triangle MPD \sim \triangle COD; \qquad \triangle NQE \sim \triangle COE;$$

兩組對應邊的相似比都是:

$$\overline{PD} : \overline{OD} = \overline{MP} : \overline{CO} = 1 : 2; \qquad \overline{QE} : \overline{EO} = \overline{NQ} : \overline{CO} = 1 : 2.$$

把 AB 直線上的這些線段的長度都用基本線段長度 $\overline{AB}$ 表達出來:

$$\overline{AO} = \overline{BO} = \frac{1}{2} \times \overline{AB};$$
$$\overline{AP} = \overline{PO} = \overline{OQ} = \overline{QB} = \frac{1}{4} \times \overline{AB};$$
$$\overline{PD} = \overline{QE} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) \times \overline{AB};$$
$$\overline{DO} = \overline{EO} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\right) \times \overline{AB};$$

於是, 用簡單的加法就可以算出來:

$$\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}.$$

推廣: 上述命題中'正'三角形的'正', 可以改爲'等腰'。

命題甲 $1''$: 取等腰 $\triangle ABC$

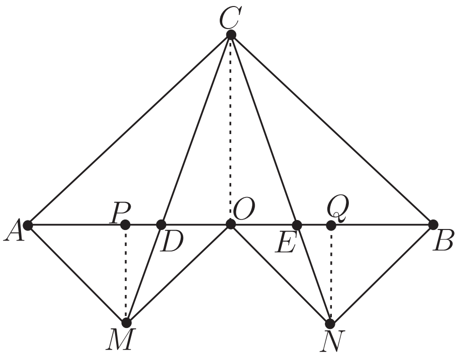
底邊 $\overline{AB}$ 的中點 O,

取兩點 M, N, 使得:

$\overline{CA} \parallel \overline{OM} \parallel \overline{BN}$.

$\overline{CB} \parallel \overline{ON} \parallel \overline{AM}$.

則: $\overline{CM}, \overline{CN}$ 把 $\overline{AB}$ 等分爲三。



證明: 上述的證明原封不動!

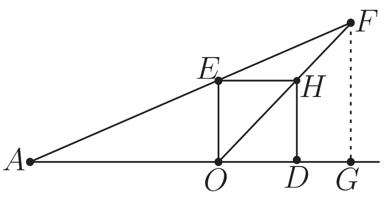
對於前述的例乙 6, 其實只用到正方形的性質而已, 圓的性質只用到一點點, 所以現在擦拭掉圖中的圓, 同時把原先的命題, 改述成如下等價的。

命題乙 $6'$: 將正方形 $ODHE$ 的對角線

$\overline{OH}$ 延長到 F, 使得: $\overline{HF} = \overline{HD}$。

又將 $\overline{DO}$ 延長到 A, 使得: $\overline{OA} = \overline{OF}$。

則: A, E, F 三點共線。



證明: 記正方形 $ODHE$ 的邊長爲 $\rho = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{HD}$; 於是 $\overline{OH} = \sqrt{2} \times \rho$。依照題意 $\overline{HF} = \rho$; 因此 $\overline{OA} = \overline{OF} = \overline{OH} + \overline{HF} = (\sqrt{2} + 1) \times \rho$。若從 F 做垂線 $\overline{FG}$ 到直線 $\overline{AD}$, 則得: 相似直角三角形 $\triangle OGF \sim \triangle ODH$; (因 O, H, F 三點共線;) 由等腰直角三角

形 $\triangle OGF$ 的斜邊長 $\overline{OF}$, 算出兩腰之長

$$\overline{OG}=\overline{GF}=\frac{\overline{OF}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\times\rho;$$

於是

$$\overline{AG}=\overline{AO}+\overline{OG}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}}\times\rho.$$

注意到三點 E,H,F 都在直線 $\overline{AODG}$ 的同側, 我們比較兩個直角三角形 $\triangle AOE$ 與 $\triangle AGF$, 是否相似? 計算對應的腰長之比例:

$$\overline{AO}:\overline{AG}=(\sqrt{2}+1)\times\rho:\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}}\times\rho \qquad =\sqrt{2}:(\sqrt{2}+1);$$

$$\overline{OE}:\overline{GF}=\rho:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\times\rho \qquad =\sqrt{2}:(\sqrt{2}+1);$$

這就證明了兩個直角三角形相似: $\triangle AOE\sim\triangle AGF$。於是: 角度一致: $\angle OAE=\angle GAF$. 因爲 E,F 都在直線 $\overline{AG}$ 的同側, 而且一邊 $\overline{AO}$ 與 $\overline{GF}$ 重合, 所以另一邊 $\overline{AE}$ 與 $\overline{AF}$ 也重合: A,E,F, 三點共線。

2. 邏輯上的關聯

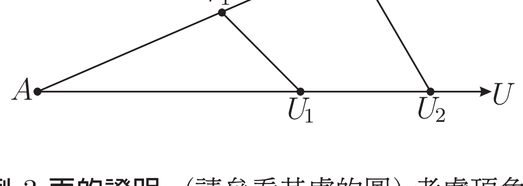
要對付例 3 丙、例 2 丁與例 5 戊這幾個題目, 我們將利用如下的。

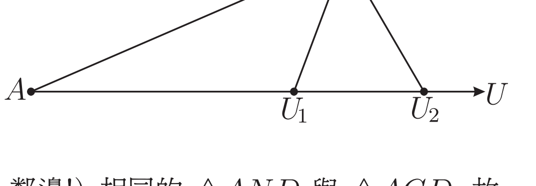
基本定理: 如果兩個三角形 $\triangle A_1U_1V_1$ 與 $\triangle A_2U_2V_2$ 有一個角度相等: $\angle U_1A_1V_1=\angle U_2A_2V_2$, 則它們面積的比, 就等於夾這個角度的兩個鄰邊長度相乘積的比:

$$|\triangle A_1U_1V_1|:|\triangle A_2U_2V_2|=\overline{A_1U_1}\times\overline{A_1V_1}:\overline{A_2U_2}\times\overline{A_2V_2}.$$

定理的特例: 如果兩個三角形 $\triangle A_1U_1V_1$ 與 $\triangle A_2U_2V_2$ 不但有一個角度相同, 而且這角度的一個鄰邊也重合爲一, 則兩者面積的比就等於另外的那一鄰邊長度的比:

$$|\triangle A_1U_1V|:|\triangle A_2U_2V|=\overline{A_1U_1}:\overline{A_2U_2}.$$





例 3 丙的證明: (請參看其處的圖) 考慮頂角 (與一鄰邊!) 相同的 $\triangle AND$ 與 $\triangle ACD$, 故:

$$\frac{\triangle AND}{\triangle ACD}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}.$$

同樣考慮頂角 (與一鄰邊!) 相同的 $\triangle AMD$ 與 $\triangle ABD$, 故:

$$\frac{\triangle AMD}{\triangle ABD}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

這兩式相加, 注意到分母

$$\triangle ACD=\triangle ABD; \qquad \overline{AC}=\overline{AB}.$$

因此:

$$\frac{\triangle AND+\triangle AMD}{\triangle ACD}=\frac{\overline{AN}+\overline{AM}}{\overline{AC}}.$$

即:

$$\frac{\triangle ANM}{\triangle ACD}=\frac{\overline{AN}+\overline{AM}}{\overline{AC}}.$$

或即:

$$\frac{\overline{AN}+\overline{AM}}{\triangle ANM}=\frac{\overline{AC}}{\triangle ACD}=\frac{2\times\overline{AC}}{2\times\triangle ACD}=\frac{2\times\overline{AC}}{\triangle ABC}.$$

但是分母之比, 依照基本定理,

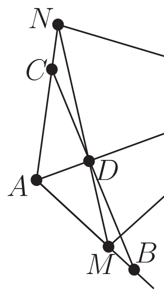
$$\triangle ANM:\triangle ABC=(\overline{AN}\times\overline{AM}):(\overline{AB}\times\overline{AC}).$$

那麼:

$$\frac{\overline{AN}+\overline{AM}}{\overline{AN}\times\overline{AM}}=\frac{2\times\overline{AC}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{2}{\overline{AB}}.$$

這就是待證式。

例 2 **丁的證明**: (請先參看其處的圖) 我們把那個外接圓刪掉, 就變成下圖。但是先要注意有五個 60° 的角度, 於是原命題可以改爲如下等價的。



參考圖 ($2'$ 丁)

命題 $2'$ **丁**: 四邊形 $LMAN$ 的對角線相交於 D,

$$\begin{aligned}而\ 60^\circ&=\angle LAN=\angle LAM\\&=\angle NML=\angle MLN=\angle LNM.\end{aligned}$$

則: $\dfrac{1}{\overline{AM}}+\dfrac{1}{\overline{AN}}=\dfrac{1}{\overline{AD}}$.

證明: 過 D 做 $\overline{AD}$ 的垂線, 交 $\overrightarrow{AN}$ 於 C 點, 交 $\overrightarrow{AM}$ 於 B 點 (如上圖)。
注意到 $\angle DAN=\angle DAM=60^\circ$, 而且此地有特別角 $\angle ABD=\angle ACD=30^\circ$,
因而: $\overline{AB}=2\times\overline{AD}$。整個狀況就適用命題 (例) 3丙！

例 5 戊的證明: 過 D 做 $\overline{AD}$ 的垂線, 交 $\overrightarrow{AU}$ 於 C 點, 交 $\overrightarrow{AV}$ 於 B 點。
整個狀況就適用命題 (例) 3丙, 只是現在要施用兩次, 因爲有兩組線段 $\overline{M_1DN_1}$ 與 $\overline{M_2DN_2}$。
我們設:

$$\overline{AN_1} > \overline{AB} > \overline{AM_1}, \qquad \overline{AM_2} > \overline{AB} > \overline{AN_2}.$$

現在有兩組調和數列:

$$\text{(i:)}\ \frac{1}{\overline{AM_1}} - \frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{AN_1}};$$

$$\text{(ii:)}\ \frac{1}{\overline{AM_2}} - \frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{AN_2}}.$$

兩式相減:

$$\frac{1}{\overline{AM_1}} - \frac{1}{\overline{AM_2}} = \frac{1}{\overline{AN_2}} - \frac{1}{\overline{AN_1}};$$

通分成:

$$\frac{\overline{AM_2} - \overline{AM_1}}{\overline{AM_2} \times \overline{AM_1}} = \frac{\overline{AN_1} - \overline{AN_2}}{\overline{AN_1} \times \overline{AN_2}}.$$

也就是:

$$\frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{AM_2} \times \overline{AM_1}} = \frac{\overline{N_1N_2}}{\overline{AN_1} \times \overline{AN_2}}.$$

3. 軌跡問題

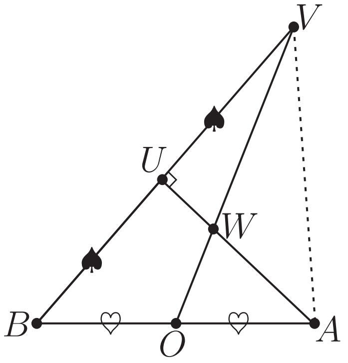


圖 4′己

例 4 己的證明: 如果我們把動點U的*居留地*那個O圓刪去, 原圖就簡化成左圖。但是我們特意示明了: $\angle AUB = \angle AUV = 90°$; 這間接示明: U 是在以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓 O 上。
我們也示明 (♠ :) $\overline{BU} = \overline{UV}$。
故 $\triangle ABV$ 等腰, 頂點爲 A。

最重要的是: 因爲 (♡ :) $\overline{BO} = \overline{OA}$, 所以 $\overline{VO}$, $\overline{AU}$ 是 $\triangle ABV$ 的兩條中線, 這就讓我們可以運用如下 (週知) 的重心定理。

重心定理: 對於任何 $\triangle ABC$, 取三邊中點 D, E, F, 則: 三條中線 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 交於一點 G, 即重心; 重心 G 把各中線分割爲 $2:1$; 如: $\overline{AG} = \frac{2}{3}\times\overline{AD}$, $\overline{DG}:\overline{AG} = 1:2$; 於是, 如果我們過 G 做出平行線 $\overline{GK} \parallel \overline{DF} \parallel \overline{CA}$, 而 $\overline{GK}$ 交 $\overline{AB}$ 於 K, 則有

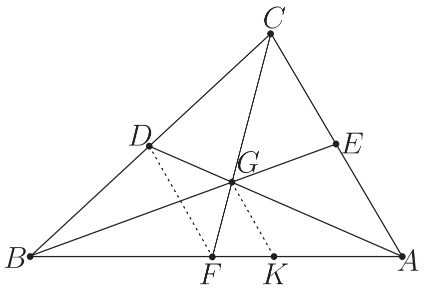


圖 4″己

$$\overline{GK} = \frac{2}{3}\times\overline{DF} = \frac{1}{3}\times\overline{AC}.$$

注意到: 要運用重心定理時, 必須把 圖 4″ 己中的那些點重新標誌, 對照到圖 4″ 己 中的對應點:

$$V = C; U = D; O = F; W = G;$$

而且這裡的圖 4″ 己, 非常一般, 沒要求等腰, 即允許 $\overline{AB} \neq \overline{AC}$。而在 4′ 己圖中, 其實有 $\overline{AB} = \overline{AV}$。

回到例 4 己。根據這個重心定理, 如果: 固定線段 AB, 因而固定了其中點 $F = O$, 以及三分點 K, 但是: 讓點 $D = U$ 在以 $\overline{AB}$ 爲直徑的定圓上變動, 那麼: 點 $C = V$ 就跟著變動, $\triangle ABC$ 的重心 $G = W$ 也跟著變動! 雖然 $G = W$ 是動點, 但是: $\overline{KG} = \frac{1}{3}\times\overline{AB}$ 是固定的: 這裡的 $\overline{AC}$ 是例 4 中的 $\overline{AV} = \overline{AB}$。而 K 點也是固定的, 所以得到原軌跡問題的解答:

動點 W 的軌跡是一圓, 圓心 K 是從 A 到 B 的三分點, 半徑是 $\frac{1}{3}\times\overline{AB}$。

參考文獻

1. 于志洪。應用極坐標三點共線公式證明幾何題。數學傳播季刊, 47(3), 89-93, 2023。

—本文作者爲台北市退休數學教師—